模块一 排列与组合（★★★）

内容提要

排列组合问题种类繁多，有难有易，本节将梳理一些考试中常见的题型，每种题型都有自己的独特特征，处理方法也有一些差异，对它们进行归纳总结，是有必要的.

1．考查两个计数原理的简单题型：相关考题属概念题，难度不高，解题的核心是分清楚何时分类，何时分步，做到分类标准清晰，分步层次清楚，不重不漏即可.

2．特殊元素优先考虑：对有限制条件的排列组合问题，常先把那些有特殊要求的元素安排好，再排其它没有要求的元素.

3．元素相邻问题：若排列时，要求某些元素必须相邻，则可将必须相邻的元素捆绑在一起，看成一个元素，再与其它元素进行排列，但需注意捆绑的元素内部可交换顺序.

4．元素不相邻问题：若排列时，要求某些元素不能相邻，则先把其它元素排好，再将不能相邻的元素插入到空位中即可.

5．分组分派问题：把 m 个人安排到 $n(m>n)$ 项工作，每人只安排一项工作，每项工作至少安排一人，这类问题常采用先分后排的方法处理，可先把 m 个人分成 n 组，再将 n 组人员派到 n 项工作.

6．排数字问题：这类题可画出数位，往数位上依次填入数字即可.

①若供选择的数字中有 0，则 0 不能排最高位，故常先用其它数字把最高位排了；

②若要求排出的数是奇数或偶数，则考虑最低位的数字为奇数数字或偶数数字；

③若要求排出的数字比某数大或比某数小，则先排最高位的数字，因为最高位对数的大小的影响最重.

7．染色问题：这类问题常用“跳格分类”的方法处理，详见本节类型Ⅶ.

典型例题

类型Ⅰ：两个计数原理的简单应用

【例 1】（2020·新高考Ⅰ卷）6 名同学到甲、乙、丙三个场馆做志愿者，每名同学只去 1 个场馆，甲场馆安排 1 名，乙场馆安排 2 名，丙场馆安排 3 名，则不同的安排方法共有（　　）

（A）120 种　（B）90 种　（C）60 种　（D）30 种

解析： 按照甲、乙、丙各场馆的人数要求，分三步从 6 人中依次选出对应的人进行安排即可，

第一步，从 6 名同学中选 1 名安排到甲场馆，有 C_6^1 种方法；

第二步，从余下的 5 名同学中选 2 名安排到乙场馆，有 C_5^2 种选法；

第三步，从余下的 3 名同学中选 3 名安排到丙场馆，有 C_3^3 种选法；

由分步乘法计数原理，不同的安排方法共有 $C_6^1C_5^2C_3^3=60$ 种.

答案： C

【变式 1】一个宿舍的 6 名同学被邀请参加一个节目，要求必须有人去，但去几个人可自行决定，其中甲和乙两名同学要么都去，要么都不去，则该宿舍同学的去法共有（　　）

（A）15 种　（B）28 种　（C）31 种　（D）63 种

解析：从条件来看，可按甲乙都去、都不去分类考虑，

①若甲乙都去，则剩下的 4 人可以去 0 人、1 人、2 人、3 人、4 人，有 $C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=16$ 种去法；

②若甲乙都不去，则剩下的 4 人可以去 1 人、2 人、3 人、4 人，有 $C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=15$ 种去法；

由分类加法计数原理，该宿舍同学的去法共有 $16+15=31$ 种.

答案：C

【变式 2】某学校开设 4 门球类运动课程，5 门田径类运动课程和 2 门水上运动课程供学生学习，某位学生要从中选 2 门不同类型的运动课程，则不同的选法有_____种.（用数字作答）

解析：选出的两门课程不同类，可按课程类型进行分类，

①若选 1 门球类 1 门田径类，则有 $C_4^1C_5^1=20$ 种；

②若选 1 门球类 1 门水上运动，则有 $C_4^1C_2^1=8$ 种；

③若选 1 门田径类和 1 门水上运动，则有 $C_5^1C_2^1=10$ 种；

由分类加法计数原理，不同的选法共有 $20+8+10=38$ 种.

答案：38

【变式 3】从 5 男 3 女共 8 名学生中选出班长 1 人，副班长 1 人，纪律委员 1 人，要求至少有 1 名女生入选，共有_____种不同的选派方法.（用数字作答）

解法 1：事情可分两步完成，第一步，先确定选出来的是哪三人，由于女生至少选 1 人，故又按女生的人数分三类，

若女生选 1 人，则有 $C_3^1C_5^2=30$ 种选法；若女生选 2 人，则有 $C_3^2C_5^1=15$ 种选法；

若全部选女生，则有 $C_3^3=1$ 种选法；故选人的方法共有 $30+15+1=46$ 种，

第二步，将选出的三人安排职位，可任意安排，安排职位的方法有 $A_3^3=6$ 种，

由分步乘法计数原理，共有 $46\times6=276$ 种不同的选派方法.

解法 2：题干只有女生至少选 1 人这一个限制条件，可先不考虑它，求出共有多少种选派方法，

若不管选到的 3 人是否有女生，则直接从 8 人中选 3 人并安排职位即可，有 $A_8^3=336$ 种选派方法；

再考虑不满足要求的，即没有女生入选的情形，并在前面的总数中将其减掉，

若没有女生入选，则有 $A_5^3=60$ 种选派方法；所以满足要求的不同选派方法共有 $336-60=276$ 种.

答案：276

【反思】间接法是带限制条件的计数问题中常用的方法，分析时可先不考虑某限制条件，求出有几种方法，再计算不满足该限制条件的有几种方法，两者相减即得所求答案.

类型Ⅱ：特殊元素优先考虑

【例 2】从某学习小组的 8 人中选 2 人分别担任组长和副组长，其中甲不能担任组长，则不同的选派方法共有_____种.（用数字作答）

解法 1：甲是有特殊要求的人，可优先考虑甲，但甲不一定被选到，故分类，

①若甲被选到，则甲只能担任副组长，只需从剩下 7 人中选 1 人担任组长即可，有 $A_7^1=7$ 种选法；

②若甲未被选到，则从剩下的 7 人中选 2 人分别担任组长和副组长，有 $A_7^2=42$ 种选法；

由分类加法计数原理，不同的选派方法共有 $7+42=49$ 种.

解法 2：组长不能是甲，所以组长是有特殊要求的职位，故也可先考虑组长，于是分两步来做，

第一步，安排组长，可从除甲外的 7 人任选 1 人担任组长，有 A_7^1 种方法；

第二步，安排副组长，从剩下的 7 人任选 1 人担任副组长即可，有 A_7^1 种方法；

由分步乘法计数原理，不同的选派方法共有 $A_7^1A_7^1=49$ 种.

答案：49

【变式】从某学习小组的 8 人中选 2 人分别担任组长和副组长，其中甲不能担任组长，乙不能担任副组长，则不同的选派方法有_____种.（用数字作答）

解法 1：甲和乙是有特殊要求的人，可优先考虑他们，但他们不一定被选到，故据此分类，

①若甲、乙都入选，则只能甲担任副组长，乙担任组长，只有 1 种；

②若甲入选、乙未入选，则甲担任副组长，再从除甲、乙外的 6 人中选 1 人担任组长，有 $A_6^1=6$ 种；

③若甲未入选、乙入选，则乙担任组长，再从除甲、乙外的 6 人中选 1 人担任副组长，有 $A_6^1=6$ 种；

④若甲和乙都未入选，则从其余 6 人中选 2 人，分别担任组长和副组长即可，有 $A_6^2=30$ 种；

由分类加法计数原理，共有 $1+6+6+30=43$ 种不同的选派方法.

解法 2：组长和副组长都有特殊要求，故也可优先考虑他们，不妨先考虑组长，组长可从除甲外的任意 7 人中选，但组长是乙与组长是其余 6 人之一，接下来副组长的情形不同，故可按组长是否为乙分类，

①若乙担任组长，则副组长的限制可不考虑了，从剩下的 7 人中任选 1 人担任副组长即可，有 $A_7^1=7$ 种；

②若乙不担任组长，由于甲也不能担任组长，所以应从其余 6 人中选 1 人来担任，有 A_6^1 种选法，

接下来的副组长不能是乙和刚才选为组长的人，也有 A_6^1 种选法，故这种情况共有 $A_6^1A_6^1=36$ 种；

由分类加法计数原理，不同的选派方法有共有 $7+36=43$ 种.

答案：43

【反思】站在不同的角度来分类，复杂度可能不一样，因此分析前应先做预判，尽可能选择标准清晰且种类数较少的分类方法.

【例 3】2 名男同学 3 名女同学排成一排照相，若最左边不是男同学，则不同的照相方法有_____种.（用数字作答）

解法 1：最左边的位置有特殊要求，故先考虑它，可先从 3 名女同学中选 1 名排在最左边，有 A_3^1 种排法，其余位置可任意排，有 A_4^4 种排法，由分步乘法计数原理，全部的照相方法有 $A_3^1A_4^4=72$ 种.

解法 2：男同学是有特殊要求的人，他们不能排最左边的位置，故也可先排男同学，

第一步，2 名男同学可排右侧 4 个位置中的任意 2 个，有 A_4^2 种排法，

第二步，排 3 名女同学，可在剩下的 3 个位置上任意排，有 A_3^3 种排法，

由分步乘法计数原理，全部的照相方法有 $A_4^2A_3^3=72$ 种.

答案：72

【变式】5 名同学站成一排进行诗歌朗诵，若甲不站最左边，乙不站最右边，则不同的站法有_____种.（用数字作答）

解析：甲乙都是有特殊要求的元素，可优先考虑他们，不妨先考虑甲，甲站中间几个位置和站最右边的位置，对乙的排位有不同影响，故分类，

①若甲站最右边，如图 1，则乙的限制条件必定满足，剩下 4 人可任意排，这一类有 $A_4^4=24$ 种排法；

②若甲不站最右边，则甲只能站中间 3 个位置，有 A_3^1 种排法，甲排好后如图 2，

此时由于乙也是有特殊要求的元素，且他的要求尚未满足，故接下来又考虑乙，

乙不能排最右边，所以乙有 A_3^1 种排法，乙排好后如图 3，余下的 3 个位置可随便排了，有 A_3^3 种排法，

故这一类共有 $A_3^1A_3^1A_3^3=54$ 种排法；由分类加法计数原理，不同的站法有 $24+54=78$ 种.

__ __ __ __ 甲　　　__ __ __ 甲 __　　　__ __ 乙 甲 __

图1　　　图2　　　图3

答案：78

【总结】在计数问题中，若某些元素有特殊要求，往往优先考虑这些有特殊要求的元素，再考虑其它元素.

类型Ⅲ：元素相邻-捆绑法

【例 4】现有 A，B，C，D，E 五人要站成一排，若 A，B 必须相邻，则共有_____种站法.（用数字作答）

解析：元素相邻用捆绑法，A 和 B 必须相邻，将其捆绑看成 1 个人，与其它 3 人一起排列，有 A_4^4 种；捆绑的 A 和 B 彼此可交换顺序，如图，交换的方法有 A_2^2 种，所以全部的站法有 $A_4^4A_2^2=48$ 种.

答案：48

C　$\begin{matrix}BA\\AB\end{matrix}$　D　E

【变式】（2022 • 新高考Ⅱ卷）甲、乙、丙、丁、戊 5 名同学站成一排参加文艺汇演，若甲不站在两端，丙和丁相邻的不同排列方式有（　　）

（A）12 种　（B）24 种　（C）36 种　（D）48 种

解析：丙和丁相邻，将其捆绑看成 1 人，与剩下 3 人一起排列，排列时由于甲不站两端，先考虑甲，如图 1，甲在中间两个位置选 1 个，有 A_2^1 种排法，剩下 3 人（丙丁看成 1 人）有 A_3^3 种排法，如图 2，丙丁彼此可交换，交换的方法有 A_2^2 种，由分步乘法计数原理，不同排列方式共有 $A_2^1A_3^3A_2^2=24$ 种.

答案：B

__ 甲 __ __　　　乙 甲 丙丁 戊

图1　　　图2

【总结】某些元素必须相邻的排列问题，可将必须相邻的元素捆绑在一起，看成一个元素，与其它元素进

行排列，但需注意，捆在一起的元素内部可交换顺序.

类型Ⅳ：元素不相邻-插空法

【例 5】某晚会有 3 个歌唱类节目，2 个舞蹈类节目，要求 2 个舞蹈节类目不相邻，则不同的节目顺序有_____种.

解析：元素不相邻用插空法，第一步，先排 3 个歌唱节目，有 A_3^3 种，排好后产生 4 个空位，如图；

第二步，将 2 个舞蹈节目插入其中的 2 个空位，有 A_4^2 种；

由分步乘法计数原理，不同的节目顺序有 $A_3^3A_4^2=72$ 种.

答案：72

____ 歌1 ____ 歌2 ____ 歌3 ____

【变式】2022 年 11 月 30 日，神舟十四号宇航员陈冬、刘洋、蔡旭哲和神舟十五号宇航员费俊龙、邓清明、张陆顺利“会师太空”，为记录这一历史时刻，他们准备在天和核心舱合影留念. 假设 6 人站成一排，要求神舟十四号三名航天员互不相邻，且神舟十五号三名航天员也互不相邻，则他们的不同站法共有（　　）种.

（A）72　　（B）144　　（C）36　　（D）108

解析：元素不相邻用插空法，此处有两组元素都要求不相邻，可先将其中一组排好，对另一组插空，

为了便于观察，把神舟十四号、十五号的宇航员依次简记为 A_{14}，B_{14}，C_{14}，D_{15}，E_{15}，F_{15}，

先把神舟十四号的三名宇航员排好，有 A_3^3 种排法，排好后产生 4 个空位，如图，

再将神舟十五号的三名宇航员插空，由于 A_{14}，B_{14}，C_{14} 也不能相邻，所以中间两个空位必须插，

故可从 D_{15}，E_{15}，F_{15} 中选两人，填入中间的两个空位，有 A_3^2 种方法，

最后一名宇航员可在左右两边的空位选一个排过去，有 A_2^1 种排法；

由分步乘法计数原理，不同的站法共有 $A_3^3A_3^2A_2^1=72$ 种.

答案：A

____ A_{14} ____ B_{14} ____ C_{14} ____

△　△

【总结】某些元素不能相邻的排列问题，可先将其它元素排好，再把不能相邻的这些元素插入空位中.

类型Ⅴ：先分后派

【例 6】将 6 本不同的书分成三份.

（1）若每份 2 本，则共有_____种不同的分法；

（2）若一份 4 本，其余两份都是 1 本，则共有_____种不同的分法.

解析：（1）可以分三步完成，第一步，从 6 本书中选 2 本作为一份，有 C_6^2 种选法，

第二步，从余下的 4 本书中选 2 本作为一份，有 C_4^2 种选法，

第三步，将最后的 2 本书选出来作为一份，有 C_2^2 种选法，

由分步乘法计数原理，共有 $C_6^2C_4^2C_2^2=90$ 种分法；

答案是 90 吗？不是！因为在这个问题中，并未指定三份书的顺序，我们可以用下述表格来罗列其中一种分法，看看重复了几遍，为了便于阐释，我们把 6 本书编号为 A，B，C，D，E，F，

C_6^2	AB	AB	CD	CD	EF	EF
C_4^2	CD	EF	AB	EF	AB	CD
C_2^2	EF	CD	EF	AB	CD	AB

上表中六列对应的分法其实是一样的，都是 AB，CD，EF 各自分一份，但按 $C_6^2C_4^2C_2^2$ 来算就计了 6 次. 事实上，每种分法都计了 6 次，这个 6 怎么来的呢？其实就是 AB，CD，EF 三份书的排列方法数 A_3^3，为了抵消同样的三份书选择的先后顺序，应除以 A_3^3，

本题消序后共有 $\dfrac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=15$ 种不同的分法.

（2）还是仿照前面的做法，先一步一步把每一份书选出来，

第一步，从 6 本书中选 4 本作为一份，有 C_6^4 种选法，

第二步，从余下的 2 本书中选 1 本作为一份，有 C_2^1 种选法，

第三步，将最后的 1 本书选出来作为一份，有 C_1^1 种选法，

由分步乘法计数原理，共有 $C_6^4C_2^1C_1^1=30$ 种分法；

注意到三份书中有两份本数是一样的，将这两份彼此交换，得到的是相同的分法，例如，$\{ABCD,E,F\}$ 和 $\{ABCD,F,E\}$ 是同一种分法，为了抵消相同本数的两份选择的顺序，应在上面结果基础上除以 A_2^2，

本题消序后共有 $\dfrac{C_6^4C_2^1C_1^1}{A_2^2}=15$ 种不同的分法.

【总结】在不同元素的分组问题中，若有某些组的元素个数相同，则逐步选出每组元素后，必须消序. 例如，按 $3+3+2+2+2+1$ 来分组，由于有两组都是 3 个元素，这两组要除以 A_2^2 消序，有三组都是 2 个元素，这三组要除以 A_3^3 消序，其它情形以此类推.

答案：15；15

【变式】将 A，B，C，D，E，F 六名医生安排到甲、乙、丙三所医院，若每个医院至少安排一名医生，每名医生只去一所医院，且医生 A 不去甲医院，则不同的安排方法有_____种.（用数字作答）

解析：医生的人数比医院数多，故可先将医生进行分组，使组数与医院数相等，便于安排，

将 6 人分成三组，从人数构成来看，有 $1+1+4$，$2+2+2$，$1+2+3$ 三种，下面分别考虑，

若按 $1+1+4$ 分组，则有 $\dfrac{C_6^1C_5^1C_4^4}{A_2^2}=15$ 种分法；若按 $2+2+2$ 分组，则有 $\dfrac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=15$ 种分法；

若按 $1+2+3$ 分组，则有 $C_6^1C_5^2C_3^3=60$ 种分法；所以分组的方法共有 $15+15+60=90$ 种，

无论哪种分组结果，接下来派到医院的过程都是一样的，故可统一考虑，

将分好的三组医生派到三所医院，由于医生 A 不去甲医院，所以 A 所在的那一组派到乙或丙医院，

有 A_2^1 种派方法，另外两组医生可随意派，有 A_2^2 种派方法；

由分步乘法计数原理，不同的安排方法有 $90A_2^2A_2^2=360$ 种.

答案：360

【总结】诸如将 m 个人安排到 $n(m>n)$ 项工作，且每人只安排一项工作，每项工作至少安排一人这类问题，考虑用先分后派的方法. 分组时需注意，若涉及某几组人数相同，则选出每组人员后，还必须消序.

类型Ⅵ：排数字问题

【例 7】用数字 0，1，2，3，4，5，6 可以组成没有重复数字的四位数_____个.

解析：要组成没有重复数字的 4 位数，唯一的要求就是 0 不能排最高位，故先考虑最高位，

第一步，从除 0 外的 6 个数字中选 1 个排在最高位，有 A_6^1 种排法；

第二步，从余下的 6 个数字中选 3 个排在后面的三位，有 A_6^3 种排法；

由分步乘法计数原理，共可组成没有重复数字的四位数 $A_6^1A_6^3=720$ 个.

答案：720

【变式 1】用数字 0，1，2，3，4，5，6 可以组成没有重复数字的四位偶数_____个.

解法 1：由于是四位偶数，所以除了 0 不能排最高位之外，还有最低位应为偶数数字，可先考虑最高位，最高位排奇数数字，还是偶数数字，对接下来最低位的安排有影响，故应分类，

①若最高位排奇数数字，则可从 1，3，5 中选 1 个排在最高位，有 A_3^1 种排法，

再考虑最低位，可从 0，2，4，6 中选 1 个排在最低位，有 A_4^1 种排法，排好后如图 1，

中间的两个位置可任意排，有 A_5^2 种排法，故这一类共有 $A_3^1A_4^1A_5^2=240$ 种；

②若最高位排偶数数字，则可从 2，4，6 中选 1 个排在最高位，有 A_3^1 种排法，

再考虑最低位，偶数数字已用掉一个，可从余下的 3 个中选 1 个排最低位，有 A_3^1 种排法，排好后如图 2，

中间的两个位置可任意排，有 A_5^2 种排法，故这一类共有 $A_3^1A_3^1A_5^2=180$ 种；

由分类加法计数原理，满足条件的四位偶数共有 $240+180=420$ 个.

解法 2：也可以先考虑最低位，最低位排 0 和排其他偶数，对接下来最高位的影响不同，故应分类，

①若最低位是 0，如图 3，其他三位可任意排，故这一类有 $A_6^3=120$ 种；

②若最低位不是 0，则最低位可从 2，4，6 中选 1 个排上去，有 A_3^1 种排法，排好后如图 4，

接下来最高位不能是 0，故又考虑最高位，0 和最低位已排的数字不能用，还剩 5 个数字，有 A_5^1 种排法，

中间 2 位可从余下的 5 个数字中任选 2 个排上去，有 A_5^2 种排法，故这一类有 $A_3^1A_5^1A_5^2=300$ 种；

由分类加法计数原理，满足条件的四位偶数共有 $120+300=420$ 个.

答案：420

1 __ __ 2　　2 __ __ 0　　__ __ __ 0　　__ __ __ 2

图1　　图2　　图3　　图4

【变式 2】用数字 0，1，2，3，4，5，6 可以组成没有重复数字的四位数，其中比 3000 大的有_____个.

解析：涉及比某数大或比某数小的问题，往往先排最高位，

排出的数要比 3000 大，只需最高位为 3，4，5，6 即可，所以最高位有 A_4^1 种排法，

其余三位可随便排，有 A_6^3 种排法，由分步乘法计数原理，满足要求的四位数有 $A_4^1A_6^3=480$ 个.

答案：480

【变式 3】用数字 0，1，2，3，4，5，6 可以组成没有重复数字的四位数，其中比 3200 大的偶数有_____个.

解析：要求比 3200 大，故先排最高位，可以是 3，4，5，6，由于要求是偶数，所以最高位为奇数还是偶数，对最低位的排法影响不同，应分类，且排 3 和排 5，再考虑百位时情形也不同，故 3 和 5 各分一类，

①若最高位为 3，如图 1，此时若要比 3200 大，则百位可排 2，4，5，6，

排奇数还是偶数对最低位的影响不同，故再分类，

当百位排奇数时，只能排 5，排好后如图 2，下一步考虑最低位，可排 0，2，4，6，有 A_4^1 种排法，

最后的十位可随便排，还剩 4 个数字没用过，有 A_4^1 种排法，故这种情况有 $A_4^1A_4^1=16$ 种；

当百位排偶数时，则百位可排 2，4，6，有 A_3^1 种排法，排好后如图 3，再排最低位，偶数数字还剩 3 个，

有 A_3^1 种排法，最后的十位可随便排，还剩 4 个数字没用过，有 A_4^1 种排法，故这种情况有 $A_3^1A_3^1A_4^1=36$ 种；

②若最高位为 5，则必定大于 3200，如图 4，下一步直接考虑最低位，可排 0，2，4，6，有 A_4^1 种排法，

中间两位可随便排，还剩 5 个数字，有 A_5^2 种排法，故这一类有 $A_4^1A_5^2=80$ 种；

③若最高位为 4 或 6，则最高位有 A_2^1 种排法，此时必定大于 3200，故下一步直接排最低位，有 A_3^1 种排法，

排好后如图 5，最后排中间两位，还剩 5 个数字，有 A_5^2 种排法，故这一类共有 $A_2^1A_3^1A_5^2=120$ 种；

由分类加法计数原理，比 3200 大的四位偶数共有 $16+36+80+120=252$ 个.

答案：252

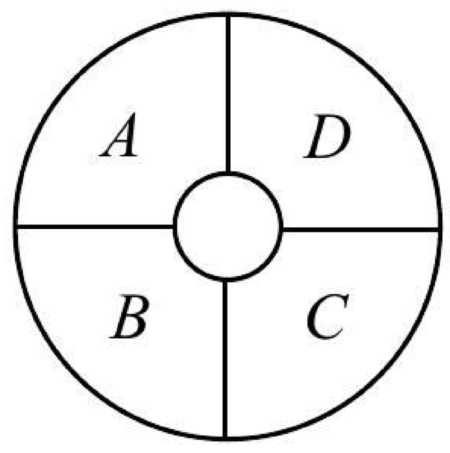
3 __ __ __　　3 5 __ __　　3 2 __ __　　5 __ __ 2　　4 __ __ 2

图1　　图2　　图3　　图4　　图5

【反思】若要求排出的数字比某数大（或小），则常按最高位的数字来分类.

【总结】从上面的几道题可以看出，对于排数字问题，常画出数位，综合应用两个计数原理来分析每个数位该怎么填，需注意三点：①数字 0 不能排最高位；②若对奇偶有要求，则考虑最低位的数字的奇偶；③类型Ⅶ：染色问题

【例 8】如图，一环形花坛分成 A，B，C，D 四块，现有 4 种不同的花可供选择，要求在每块里种 1 种花，相邻的两块种不同的花，则不同的种法总数为_____.



解析：为了便于阐述，我们将 4 种花编号为 1，2，3，4，不妨先种 A 这一块，有 C_4^1 种种法，

接下来种哪块呢？由于 C 和 A 种相同的花或不同的花，接下来 B，D 的考虑方法有区别，故对 C 分类，

若 C 与 A 种相同的花，如图 1，则 C 有 1 种种法，而 B，D 各自都可从余下的 3 种花中选一种来种，

所以 B，D 都有 C_3^1 种种法，结合 A 有 C_4^1 种种法知这一类共有 $C_4^1C_3^1C_3^1=36$ 种不同的种法；

若 C 与 A 种不同的花，如图 2，则 C 有 C_3^1 种种法，而 B，D 各自都可从余下的 2 种花中选一种来种，

所以 B，D 都有 C_2^1 种种法，故这一类共有 $C_4^1C_3^1C_2^1C_2^1=48$ 种不同的种法；

由分类加法计数原理，不同的种法总数为 $36+48=84$ 种.

答案：84

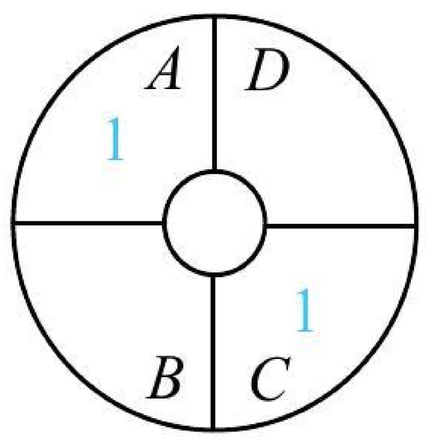


图1

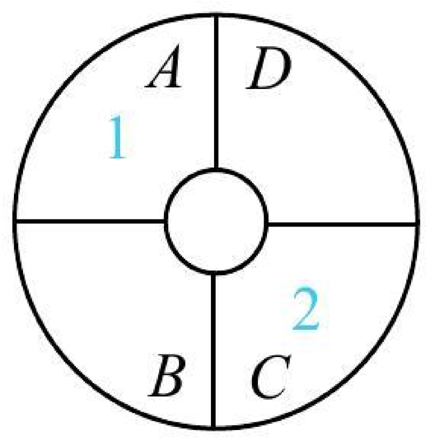
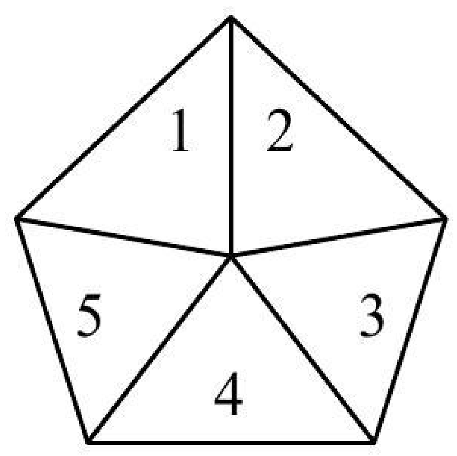


图2

【反思】染色问题常采用“跳格分类”的方法处理，例如本题中 A，C 之间跳了一格，故可按 A，C 相同和 A，C 不同分类，再来考虑 B，D.

【变式】如图，将标号为 1，2，3，4，5 的五块区域染上红、黄、绿三种颜色中的一种，使得相邻区域（有公共边）的颜色不同，则不同的染色方法有_____种.



解析：不妨从 1 号开始染色，颜色共有 3 种，所以 1 号有 C_3^1 种染法，

下一步染哪个区域？仍用“跳格分类”的方法，应对 3 号或 4 号分类讨论，不妨染 3 号，

若 3 号与 1 号同色，则 3 号只有 1 种染法，染好后如图 1，

此时再考虑与 3 号跳格的 5 号，它不能与 3 号同色，否则 5 号与 1 号同色，不合题意，

所以 5 号有 C_2^1 种染法，染好后如图 2，最后考虑 2 号和 4 号，分别有 C_2^1，C_1^1 种染法，

所以这一类共有 $C_3^1\times1\times C_2^1\times C_2^1\times C_1^1=12$ 种染法；

若 3 号与 1 号不同色，则 3 号有 C_2^1 种染法，染好后如图 3，

此时与 3 跳格的 5 号可以与 3 同色，也可以不同色，故又讨论，

①若 5 号与 3 号同色，则 5 号只有 1 种染法，染好后如图 4，最后的 2 号和 4 号分别有 C_1^1，C_2^1 种染法，所以这一类共有 $C_3^1C_2^1C_1^1C_1^1C_2^1=12$ 种染色方法；

②若 5 号与 3 号不同色，则 5 号只有 1 种染法，染好后如图 5，最后的 2 号和 4 号各自都只有 1 种染法，所以这一类共有 $C_3^1C_2^1C_1^1C_1^1C_1^1=6$ 种染法；

综上所述，不同的染色方法有 $12+12+6=30$ 种.

答案：30

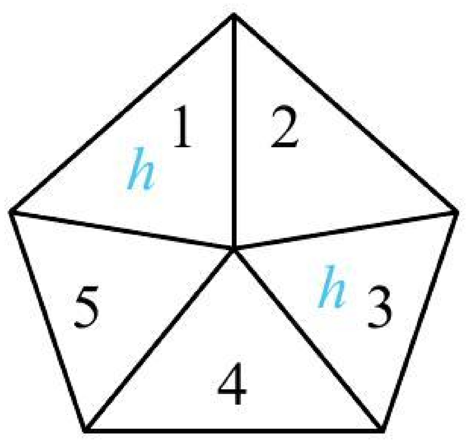


图1

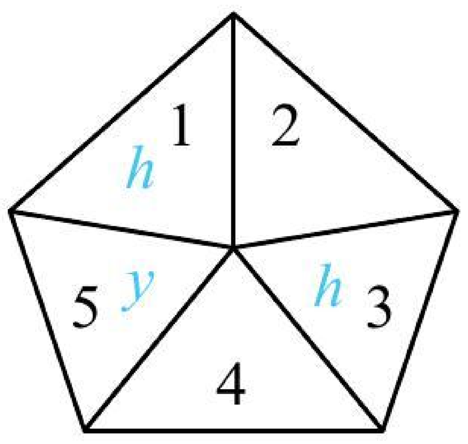


图2

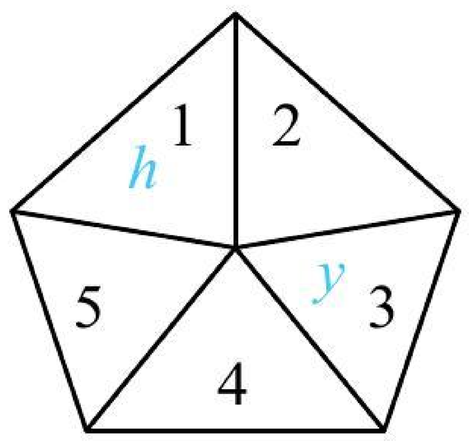


图3

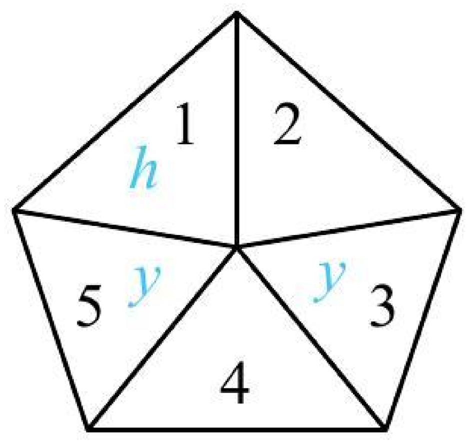


图4

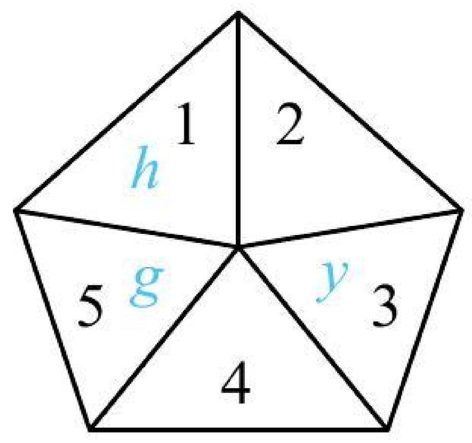


图5

【总结】染色问题用“跳格分类”的方法处理很方便，且为了让逻辑更清晰，实际操作的时候我们可以按照染色的步骤，画树状图来分析，例如，上面变式的染色过程可用如下的树状图表示.

1号 C_3^1 — 3号
- 与1同色 1种 — 5号
  - 与3同色 不合题意
  - 与3不同色 C_2^1 — 2号 C_2^1 — 4号 C_1^1
- 与1不同色 C_2^1 — 5号
  - 与3同色 1种 — 2号 C_1^1 — 4号 C_2^1
  - 与3不同色 C_1^1 — 2号 C_1^1 — 4号 C_1^1

强化训练

1.（2022 • 福建模拟 • ★★）某校开设 A 类选修课 4 门，B 类选修课 3 门，某位同学要从中选 3 门课，要求这三门课不是同一类，则不同的选法共有_____种.

2.（2023 • 新高考 I 卷 • ★★）某学校开设了 4 门体育类选修课和 4 门艺术类选修课，学生需从这 8 门课中选 2 门或 3 门课，并且每类选修课至少选 1 门，则不同的选课方案共有_____种.（用数字作答）

3.（2023 • 成都模拟 • ★★）六个人从左至右排成一行，最左端只能排甲或乙，最右端不能排甲，则不同的排法共有（　）

（A）192 种　（B）216 种　（C）240 种　（D）288 种

4．（2023 • 重庆模拟 • ★★★）春节文艺汇演中需要将 A，B，C，D，E，F 六个节目进行排序，若 A，B 两个节目必须相邻，且都不能排在 3 号位置，则不同的排序方式有_____种.

5．（2023 • 宁夏模拟 • ★★★）五声音阶是中国古乐基本音阶，故有成语“五音不全”，中国古乐中的五声音阶依次为宫、商、角、徵、羽，把这五个音阶排成一列，形成一个音序，若徵、羽两音阶相邻且在宫音阶之后，则可排成不同的音序的种数为_____.（用数字作答）

6．（2022 • 盐城模拟 • ★★）2022 年冬奥会吉祥物“冰墩墩”与冬残奥会吉祥物“雪容融”有着可爱的外表和丰富的寓意，深受全国人民的喜爱. 某商店有 3 个不同造型的“冰墩墩”和 4 个不同造型的“雪容融”吉祥物展示在柜台上，要求“冰墩墩”和“雪容融”彼此间隔排列，则不同的排列方法有_____种.

7．（2022 • 广州二模 • ★★★）现有甲、乙、丙、丁、戊、己 6 名同学在比赛后合影留念，若甲、乙二人必须相邻，且丙、丁二人不能相邻，则符合要求的排列方法有_____种.

8．（2022 • 青岛模拟 • ★★★）将 8 块完全相同的巧克力分配给 A，B，C，D 四人，每人至少分到 1 块且最多分到 3 块，则不同的分配方案共有_____种.（用数字作答）

9．（2021 • 全国乙卷 • ★★★）将 5 名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑、冰球和冰壶 4 个项目进行培训，每名志愿者只分配到 1 个项目，每个项目至少分配 1 名志愿者，则不同的分配方案共有（　　）

（A）60 种　（B）120 种　（C）240 种　（D）480 种

10．（2023 • 全国模拟 • ★★★）安排 5 名学生去 3 个社区进行志愿者服务，每人只去 1 个社区，要求每个社区至少安排 1 名学生，则不同的安排方法有（　　）

（A）360 种　（B）300 种　（C）150 种　（D）125 种

11．（2022 • 昆明模拟 • ★★★）将 5 名冬奥会志愿者分配到北京、延庆、张家口三个赛区参加活动，北京赛区至少分配 2 名志愿者，其它赛区至少分配 1 名志愿者，每名志愿者只分配到 1 个赛区，则不同的分配方案共有（　　）

（A）80 种　（B）50 种　（C）40 种　（D）25 种

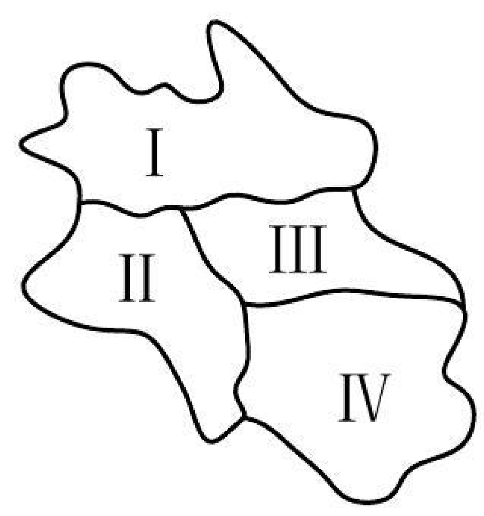
12．（2023 • 全国模拟 • ★★）由数字 0，1，2，3，4，5，6，7 组成没有重复数字的三位数，则能被 5 整除的三位数共有_____个.

13．（2022 • 北京模拟 • ★★★）用 0，1，2，3，4，5 这六个数字可以组成无重复数字的四位偶数（　　）

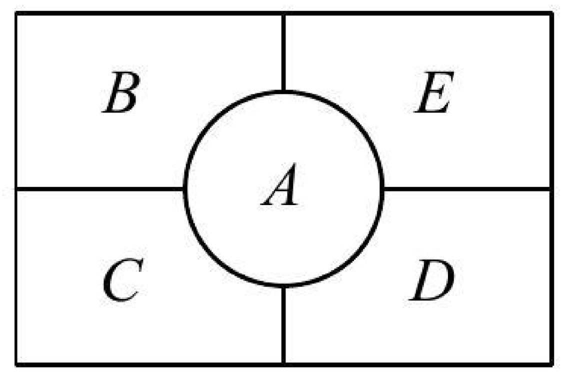
（A）60 个　（B）106 个　（C）156 个　（D）216 个

14．（2022 • 广州模拟 • ★★★）用数字 0，1，2，3，4，5 可以组成没有重复数字，且比 20000 大的五位偶数共_____个.

15．（2023 • 天津和平三模 • ★★★）如图，现要用 5 种不同的颜色对某市的 4 个区县的地图进行涂色，要求有公共边的两个地区不能用同一种颜色，共有_____种不同的涂色方法.



16．（2023 • 广东珠海模拟 • ★★★）五一期间，某公园准备用不同的花卉装扮一个有五个区域的矩形花坛（如图），要求同一个区域用同一种花卉，相邻区域不能使用同种花卉，现有 5 种花卉可供选择，则不同的装扮方法共有_____种.（用数字作答）



17．（2022 • 重庆模拟 • ★★★★）某地高考规定每一考场安排 24 名考生，编成六行四列就座，若甲乙两位考生在同一考场，那么他们既不前后相邻，也不左右相邻的坐法有_____种.